I CINQUE POLIEDRI REGOLARI

Esistono cinque poliedri particolari, che vengono detti *regolari* o anche *platonici* (per una ragione che verrà esposta tra poco) e che erano noti alla scienza greca qualche secolo prima di Cristo.

Tali poliedri hanno tutti gli spigoli di lunghezza uguale, hanno tutte le facce che sono poligoni regolari uguali tra loro, e gli angoloidi pure tutti regolari ed uguali tra loro. Inoltre ognuno di questi poliedri ha la proprietà di appartenere interamente ad ogni semispazio determinato dal piano di una qualunque tra le sue facce; si suole esprimere questa proprietà dicendo che ognuno di questi poliedri è *convesso.*

Per tutti i poliedri convessi, e quindi anche per questi di cui stiamo parlando, vale un importante teorema che è stato dimostrato dal matematico svizzero Leonhard Euler (1707-83), il cui nome viene italianizzato con "Eulero"; questo teorema viene enunciato nel modo seguente:

Indicati con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici, con S il numero degli spigoli di un qualunque poliedro convesso, vale la relazione, detta " relazione di Eulero":

(1) $$F + V = S + 2.$$

Inoltre, per ognuno dei poliedri di cui stiamo parlando, si dimostra che esiste una sfera che passa per tutti i vertici, e viene chiamata "sfera *circoscritta* " al poliedro. Il centro di questa sfera viene detto anche "centro" del poliedro; esso è centro di una simmetria che trasforma il poliedro in sé.

I nomi dei poliedri di cui stiamo parlando derivano dalle parole che, in lingua greca, indicano il numero delle loro facce e sono: Tetraedro (che ha 4 facce triangolari), Esaedro (che ha 6 facce quadrate, e viene anche chiamato abitualmente *cubo),* Ottaedro (che ha 8 facce triangolari), Dodecaedro (che ha 12 facce pentagonali), Icosaedro (che ha 20 facce triangolari).

La scienza greca accettava quattro componenti fondamentali (elementi) di ogni oggetto materiale: il fuoco, la terra, l'acqua e l'aria. Si pensava inoltre che ognuno di questi elementi avesse a sua volta delle componenti molto piccole (quasi come noi pensiamo le molecole materiali), e che le molecole di ognuno degli elementi avessero le forme di quattro tra i poliedri regolari: precisamente si pensava che le particelle elementari del fuoco avessero la forma di tetraedro regolare, quelle della terra avessero forma cubica, quella dell'acqua avessero la forma dell'icosaedro regolare, e quelle dell'aria avessero la forma dell'ottaedro regolare. Il filosofo Platone, che espone queste concezioni nel dialogo intitolato "Timeo" , afferma infine che il quinto poliedro regolare, precisamente il dodecaedro, è stato creato per "ornamento dell'intero universo." Egli inoltre dimostra, nella stessa opera, che non possono esistere altri poliedri regolari, oltre a questi; per queste ragioni i poliedri enumerati vengono anche detti *platonici.*

Ognuno dei poliedri platonici è mutato in sé da certi movimenti rigidi dell'intero spazio su se stesso che lasciano fermo il centro della sfera circoscritta. Si osserva che due di questi movimenti rigidi, eseguiti uno di seguito all'altro, danno ancora un movimento rigido che muta il poliedro in sé; e che il risultato di ogni movimento può essere annullato con un altro. Pertanto l'insieme di tutti questi movimenti rigidi viene chiamato con il termine tecnico di *gruppo*, e si usa parlare di "gruppo di operazioni" o di "trasformazioni" di un poliedro in se stesso.

Se si lascia cadere l'ipotesi che i poliedri di cui si tratta siano convessi, si possono costruire altri solidi regolari mutati in se stessi da gruppi finiti di movimenti rigidi dello spazio: così la matematica del secolo XIX ha costruito dei poliedri regolari che vengono detti *stellati.*

TETRAEDRO REGOLARE

Il poliedro ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli. Le facce sono tutte triangoli equilateri, uguali tra loro: i 4 angoloidi sono tutti dei triedri regolari, pure tutti uguali tra loro, e ciascuna delle loro facce ha apertura di 60°.

Vi sono due classi di rette, passanti per il centro del poliedro, che sono importanti per la classificazione delle trasformazioni (movimenti rigidi) che portano il poliedro in sé; esse sono:

A) Le quattro rette che uniscono ciascuno dei 4 vertici con il centro della faccia triangolare che ha come vertici gli altri tre, diversi da quello considerato.

Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in sé dalle 2 rotazioni che hanno la retta come asse ed ampiezze:

(2) 120°, 240°.

B) Le tre rette che passano per i punti medi delle coppie di spigoli del poliedro che non sono incidenti.

Queste tre rette sono a due a due perpendicolari tra loro; considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene mutato in sé dalla rotazione di 180° (ribaltamento) che ha la retta come asse.

Queste trasformazioni sono in numero di 12: infatti vi sono:

8 = 2·4 rotazioni attorno agli assi descritti sub A),

3 rotazioni attorno agli assi descritti sub B.

Infine questo insieme di operazioni effettive viene ampliato con l'operazione identica, cioè con la corrispondenza che lascia ogni punto del poliedro in se stesso.

Nel modello in *perspex* gli spigoli del poliedro sono di tre colori diversi . Risulta così messo in evidenza il fatto che ogni movimento rigido che muta in sé il poliedro corrisponde ad una operazione del gruppo delle permutazioni di un insieme costituito da tre oggetti; nel caso in esame gli "oggetti" sono rappresentati dai colori degli spigoli.

ESAEDRO REGOLARE O CUBO

Il poliedro ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli. Le facce sono tutte dei quadrati, uguali tra loro. Gli 8 angoloidi sono tutti dei triedri regolari, pure tutti uguali tra loro, e le loro facce hanno apertura di 90°.

Vi sono tre classi di rette, passanti per il centro del poliedro, che sono importanti per la classificazione delle trasformazioni (movimenti rigidi) che portano il poliedro in sé.

A) Le 3 rette che uniscono il centro di una faccia con quella della faccia parallela. Queste tre rette sono perpendicolari due a due. Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in sé da 3 rotazioni che hanno la retta come asse ed ampiezze:

(3) 90°, 180°, 270°.

B) Le 4 rette che uniscono un vertice con il suo simmetrico rispetto al centro. Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in sé da due rotazioni che hanno la retta per asse ed ampiezze:

(4) 120°, 240°.

C) Le 6 rette che uniscono i punti medi di due spigoli simmetrici rispetto al centro.

Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in sé da una rotazione di 180° che ha la retta come asse.

Queste trasformazioni sono in numero di 24, e precisamente:

9 = 3·3 rotazioni rigide attorno agli assi descritti sub A).

8 = 2·4 rotazioni rigide attorno agli assi descritti sub B)

6 ribaltamenti attorno agli assi descritti sub C).

Questo insieme di operazioni effettive viene ampliato con l'operazione identica, cioè con la corrispondenza che lascia ogni punto del poliedro su se stesso. Si ottiene così il numero di 24 operazioni che lasciano invariato il poliedro.

Nel modello in perspex ai 12 spigoli sono attribuiti 3 colori diversi: a quattro spigoli paralleli tra loro viene attribuito lo stesso colore.

In forma astratta si verifica che il gruppo dei movimenti del poliedro in sé è isomorfo al gruppo di tutte le possibili permutazioni di 4 oggetti diversi. Nel caso del cubo si possono prendere come "oggetti" le 4 rette descritte in B).

OTTAEDRO REGOLARE

Il poliedro ha 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli. Le facce sono tutte triangoli equilateri, uguali tra loro. I 6 angoloidi sono quadrispigoli regolari, tutti uguali tra loro, e le loro facce hanno apertura di 60°.
Vi sono 3 classi di rette passanti per il centro del poliedro, che sono importanti per la classificazione delle trasformazioni del poliedro in sé.

A) Le 4 rette che uniscono il centro di una faccia con quello della faccia simmetrica rispetto al centro.
Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in se stesso da due rotazioni che hanno la retta come asse, ed ampiezze:

(5) 120° , 240°.

B) Le 3 rette che uniscono ogni vertice con il suo simmetrico rispetto al centro del poliedro. Considerata.
una di queste rette si ha che il poliedro viene portato in sé da tre rotazioni che hanno la retta come asse ed ampiezze:

(4) 90°, 180°, 270°.

C) Le 6 rette che uniscono il punto medio di uno spigolo con quello dello spigolo simmetrico rispetto al centro del poliedro. Considerata una di queste rette si ha che il poliedro è portato in sé da una rotazione di 180° (ribaltamento), che ha la retta come asse.

Queste operazioni (movimenti rigidi) sono 24; il loro numero può essere determinato con un conteggio del tutto analogo a quello che abbiamo svolto per il cubo.

Nel modello in perspex agli spigoli sono attribuiti 3 colori diversi, e risultano avere lo stesso colore 4 spigoli che appartengono ad un medesimo piano e formano i lati di un quadrato.

Anche il gruppo dei movimenti dell'ottaedro in sé risulta essere isomorfo al gruppo di tutte le permutazioni di 4 oggetti distinti. Nel caso dell'ottaedro si possono assumere come rappresentanti di tali "oggetti" le 4 rette elencate in A).

OSSERVAZIONE. I centri delle 6 facce del cubo sono i vertici di un ottaedro regolare che ha lo stesso centro del cubo. I centri delle 8 facce dell'ottaedro regolare sono i vertici di un cubo che ha lo stesso centro dell'ottaedro.

DODECAEDRO REGOLARE.

Il poliedro ha 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli. Le facce sono pentagoni regolari, tutti uguali tra loro. Gli angoloidi sono tutti triedri regolari pure tutti uguali tra loro, e ciascuna delle loro facce ha l'apertura di 108°.
Vi sono tre classi di rette passanti per il centro del poliedro che sono importanti per la classificazione delle trasformazioni del poliedro in sé:
A) Le 6 rette che uniscono a coppie i centri delle facce giacenti in piani paralleli, facce che spesso vengono chiamate "opposte". Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in se stesso dalle 4 rotazioni (movimenti rigidi) che hanno la retta per asse ed ampiezze:
(5) 72°, 144°, 216°, 288°.
ognuna delle quali è multipla di un quinto dell'angolo giro.
B) Le 10 rette che uniscono tra loro coppie di vertici simmetrici rispetto al centro. Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in sé dalle 2 rotazioni che hanno la retta come asse ed ampiezze:
(6) 120°, 240°.
C) Le 15 rette che congiungono punti medi di spigoli simmetrici rispetto al centro (e quindi paralleli tra loro). Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene mutato in sé dalla rotazione di 180° (ribaltamento) che ha la retta come asse.
Tali operazioni sono 60, e precisamente:
$24 = 4 \cdot 6$ rotazioni attorno agli assi descritti sub A),
$20 = 2 \cdot 10$ rotazioni attorno agli assi descritti sub B),
15 rotazioni attorno agli assi descritti sub C).

Questo insieme di operazioni effettive viene ampliato con l'operazione identica, cioè con la corrispondenza che lascia ogni punto del poliedro su se stesso. Si ottiene così il numero di 60 operazioni che portano il poliedro in sé.
Nel modello in perspex gli spigoli sono di cinque colori diversi, e gli spigoli di ogni faccia pentagonale sono tutti di colori diversi.

I 30 spigoli del poliedro si ripartiscono in 5 classi, ciascuna di 6 spigoli aventi lo stesso colore. A loro volta i 6 spigoli di ogni classe si ripartiscono in tre coppie; gli spigoli di ogni coppia sono paralleli tra loro , e sono simmetrici rispetto al centro del poliedro; tre spigoli, appartenenti a tre coppie diverse, sono mutuamente ortogonali.

In forma molto astratta, ogni classe di 6 spigoli dello stesso colore può essere considerata come un "oggetto": vi sono pertanto 5 "oggetti" di questo genere, ed ogni movimento rigido che muta il poliedro in sé opera una permutazione nell'insieme dei 5 oggetti. Si ha quindi un gruppo di 60 permutazioni sull'insieme, che è sottogruppo del gruppo costituito da tutte le 120 permutazioni di 5 oggetti.

ICOSAEDRO REGOLARE

Il poliedro ha 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli. Le facce sono triangoli equilateri tutti uguali tra loro. Gli angoloidi sono tutti dei pentaspigoli regolari e tutti uguali tra loro, e ciascuna delle loro facce ha un' apertura di 60°.

Vi sono tre classi di rette, passanti per il centro del poliedro, che sono importanti per la classificazione delle trasformazioni del poliedro in sé.

A) Le 6 rette che uniscono a coppie ogni vertice con quello simmetrico rispetto al centro del poliedro.
Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene portato in se stesso da 4 rotazioni che hanno la retta come asse ed ampiezze:

(7) 72°, 144°, 216°, 288°,

ognuna delle quali è multipla di un quinto dell'angolo giro.

B) Le 10 rette che uniscono a coppie i centri di due facce triangolari che sono simmetriche rispetto al centro del poliedro. Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro è portato in sé da 2 rotazioni che hanno la retta stessa come asse ed hanno ampiezze:

(8) 120°, 240°.

C) Le 15 rette che uniscono i punti medi di due spigoli che sono simmetrici rispetto al centro del poliedro.
Considerata una di queste rette, si ha che il poliedro viene mutato in sé da una rotazione di 180° (ribaltamento) che ha per asse la retta stessa.

Ampliando l'insieme di queste operazioni con l'operazione identica si ottiene un gruppo di 60 movimenti rigidi che portano il poliedro su se stesso, con considerazioni analoghe a quelle svolte in relazione al dodecaedro, e che qui non ripetiamo.

Nel modello in perspex gli spigoli sono di 5 colori diversi; ed i 5 spigoli di un medesimo pentaspigolo, che stanno attorno ad un vertice del poliedro, hanno tutti colori diversi. Si verifica che si possono ripetere in questo caso le considerazioni che sono state esposte a proposito degli spigoli del dodecaedro.

OSSERVAZIONE.

I centri delle 12 facce del dodecaedro sono vertici di un icosaedro regolare che ha lo stesso centro**.** I centri delle 20 facce dell'icosaedro sono vertici di un dodecaedro regolare che ha lo stesso centro.

Nota. Per dati numerici, Cfr. ad esempio *Enciclopedia delle matematiche elementari*. Art. XXVI. Luigi Brusotti. Poligoni e Poliedri. Pag. 311.